أسئلة الوزارة
الرياضيات



الوحدة الثالثة

٣

التفاضل وتطبيقاته

جيل ٢٠٠٩

٣٠ سؤال من امتحانات الوزارة ٢٠٢٢–٢٠٢٦
مفحوصة من الكتاب

✓ جرّب أولاً · الإجابات والشرح في آخر الملف

الموضوع ١: مشتقة اقترانات خاصة

1 وزارة ٢٠٢٦ العام

إذا كان: $f(x) = \sin x + \cos x$، فإنّ $f'(x) \times f(x)$ هو:

a) $-\sin 2x$

b) $-\cos 2x$

c) $\cos 2x$

d) $\sin 2x$

2 وزارة ٢٠٢٥ التكميلي

أيّ مما يأتي هو اقتران أُسّي؟

a) $f(x) = x^5$

b) $g(x) = (-4)^x$

c) $h(x) = \left(-\frac{1}{5}\right)^x$

d) $p(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x$

3 وزارة ٢٠٢٥ التكميلي

إذا كان: $f(x) = 3(5)^{x-2} + 1$ ، فإنّ مدى الاقتران $f(x)$ هو:

a) (-1, ∞)

b) (1, ∞)

c) (2, ∞)

d) (-2, ∞)

4 وزارة ٢٠٢٥ التكميلي

إذا كان: $f(x) = 2\left(\frac{1}{4}\right)^x + 3$ ، فإنّ خطّ التقارب الأفقي للاقتران $f(x)$ هو:

a) y = 3

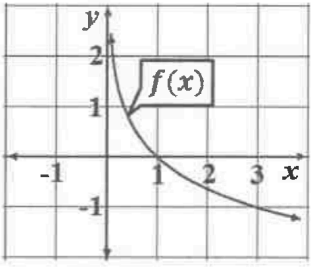
b) y = -3

c) y = 2

d) y = 0

5 وزارة ٢٠٢٥ التكميلي

يُمثل الشكل الآتي التمثيل البياني لمنحنى الاقتران $f(x)$. أيّ الآتية تُمثل قاعدة الاقتران $f(x)$ ؟



a) $f(x) = \log_2 x$

b) $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$

c) $f(x) = \log_3 x$

d) $f(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$

6 وزارة ٢٠٢٥ التكميلي

مجال الاقتران: $f(x) = \log_3(4 - x)$ ، هو:

a) R^+

b) R^-

c) $(-\infty, 4)$

d) $(4, \infty)$

الموضوع ٢: مشتقتا الضرب والقسمة والمشتقات العليا

7 وزارة ٢٠٢٦ العام

إذا كان: $f(x) = \sqrt[3]{x}(x^3 + b)$، وكان: $f'(-1) = 2$، فإنّ قيمة الثابت b هي:

a) 16

b) 4

c) 9

d) 6

8 وزارة ٢٠٢٥ العام

أ) $(\frac{2}{3}, 2)$

ب) $(0, \frac{2}{3})$

ج) $(0, \frac{4}{3})$

د) $(\frac{4}{3}, \infty)$

9 وزارة ٢٠٢٥ التكميلي

إذا كان: $f(x) = \frac{3}{x^2}$ ، فإنّ $f''(x)$ هي:

a) $-\frac{6}{x^3}$

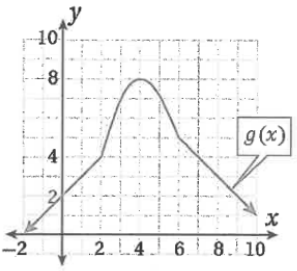
b) $\frac{6}{x^3}$

c) $\frac{18}{x^4}$

d) $-\frac{18}{x^4}$

10 وزارة ٢٠٢٥ التكميلي

يُبيّن الشكل الآتي منحنى الاقتران $g(x)$. إذا كان: $h(x) = g(x)e^{-x}$، فإن $h'(4)$ هي:



a) $7e^{-4}$

b) $-7e^{-4}$

c) $8e^{-4}$

d) $-8e^{-4}$

11 وزارة ٢٠٢٥ التكميلي

إذا أمكن التعبير عن ارتفاع نبتة مُهجّنة من نبات تبّاع الشمس باستعمال الاقتران: $h(t) = \frac{t^2}{4+t^2}$، حيث h ارتفاع النبتة بالأمتار، و t الزمن بالأشهر بعد زراعة البذور، فإنّ معدّل تغيّر ارتفاع النبتة بالنسبة إلى الزمن عندما $t = 1$ هو:

a) $\frac{3}{25}$ m/month

b) $\frac{3}{5}$ m/month

c) $\frac{8}{25}$ m/month

d) $\frac{4}{5}$ m/month

12 وزارة ٢٠٢٥ التكميلي

إذا كان: $f(x) = \frac{4}{x+1}, x < -1$، فإنّ إحداثيي النقطة التي يكون عندها $f'(x) = -1$ هي:

(a) $(1, 2)$
(b) $(1, -2)$
(c) $(-3, -2)$
(d) $(-3, 2)$

الموضوع ٣: قاعدة السلسلة

13 وزارة ٢٠٢٦ العام

إذا كان: $f(x) = e^{2x} + e^{-2x}$، فإنّ $f''(x) + 2f'(x)$ هي:

(a) $-8e^{2x}$
(b) $-8e^{-2x}$
(c) $8e^{-2x}$
(d) $8e^{2x}$

14 وزارة ٢٠٢٦ العام

إذا أمكن التعبير عن درجة حرارة الجو في أحد أيام الشتاء بالاقتران: $A(t) = \frac{16}{(t+2)^2}$، حيث t الزمن بالساعات بعد غروب الشمس، و A درجة الحرارة بالسيليسيوس، فإنّ معدّل تغيّر درجة حرارة الجو عندما $t = 2$ هو:

(a) $\frac{1}{2}\,^\circ\mathrm{C/h}$
(b) $\frac{1}{4}\,^\circ\mathrm{C/h}$
(c) $-\frac{1}{4}\,^\circ\mathrm{C/h}$
(d) $-\frac{1}{2}\,^\circ\mathrm{C/h}$

15 وزارة ٢٠٢٦ العام

إذا كان: $f(x) = \log_3(2 + \ln x)$، فإنّ $f'(e)$ هي:

(a) $\frac{e}{\ln 27}$
(b) $\frac{e}{\ln 9}$
(c) $\frac{1}{e \ln 27}$
(d) $\frac{1}{e \ln 9}$

16 وزارة ٢٠٢٦ العام

إذا أُعطي منحنى بالمعادلة الوسيطية: $x = 2\sec t$ ، $y = \tan t + 1$، حيث: $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$، فإنّ $\frac{dy}{dx}$ عندما $t = \frac{\pi}{4}$ هو:

a) \frac{\sqrt{2}}{2}

b) \frac{1}{2}

c) \sqrt{2}

d) 2

17 وزارة ٢٠٢٥ التكميلي

إذا كان: $f(x) = \cos(1 - 3x)$ ، فإنّ $f'(x)$ هي:

a) $3\sin(1 - 3x)$

b) $\frac{1}{3}\sin(1 - 3x)$

c) $-3\sin(1 - 3x)$

d) $-\frac{1}{3}\sin(1 - 3x)$

18 وزارة ٢٠٢٥ التكميلي

إذا كان: $f(x) = e^{4x} + 3$ ، فإنّ ميل العمودي على المماس لمنحنى الاقتران $f(x)$ عندما $x = 0$ هو:

a) $\frac{1}{4}$

b) $-\frac{1}{4}$

c) 4

d) -4

الموضوع ٤: الاشتقاق الضمني

19 وزارة ٢٠٢٦ العام

إذا كان: $4^x \ln y = \frac{x}{y} - 1$، فإنّ $\frac{dy}{dx}$ عندما $y = 1$ هو:

a) \frac{1}{3}

b) \frac{1}{5}

c) \frac{1}{4}

d) \frac{1}{2}

20 وزارة ٢٠٢٦ العام

إذا مثّل المستقيم l مماسًا لمنحنى العلاقة: $\sqrt{x}+\sqrt{y}=5$ عند النقطة $(4,9)$، فإنّ المقطع y للمستقيم l هو:

a) 15	b) 10
c) 6	d) 3

21 وزارة ٢٠٢٤ التكميلي

إذا كانت: $2x+y=2\sin y$ ، فإنّ قيمة $\frac{dy}{dx}$ عند النقطة $(0,0)$ هي:

a) 2	b) $-\frac{1}{2}$
c) -2	d) $\frac{1}{2}$

22 وزارة ٢٠٢٤ العام

إذا كانت: $y^2=\ln(xy)$ ، فإن $\frac{dy}{dx}$ عند النقطة $(e,1)$ ، هي:

a) $\frac{1}{e}$	b) $\frac{1}{3e}$
c) $\frac{1+e}{2e}$	d) $\frac{1-e}{2e}$

23 وزارة ٢٠٢٤ العام

إذا كانت: $x>0$ ، $y=x^{\frac{1}{x}}$ ، فإن ميل المماس لمنحنى العلاقة y عند أي نقطة تقع عليها، هو:

a) $1-\ln x$	b) $\frac{y(1-\ln x)}{x^2}$
c) $\frac{1-\ln x}{x^2}$	d) $y(1-\ln x)$

24 وزارة ٢٠٢٤ العام

إذا كان: $\int_3^5 f(x)\,dx=7$ ، $\int_1^3 2f(x)\,dx=12$ ، فأجب عن الفقرتين 20 و 21 الآتيتين:

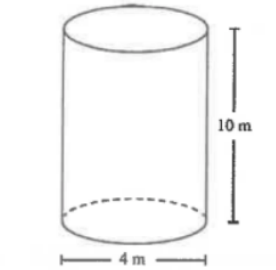
20) قيمة: $\int_3^1(3-f(x))\,dx$ هي:

a) -6	b) 0
c) 6	d) 12

الموضوع ٥: المعدلات المرتبطة

25 وزارة ٢٠٢٦ العام

يُبيّن الشكل الآتي خزّانًا أسطوانيًّا ارتفاعه $10\ \text{m}$، وطول قُطر قاعدته $4\ \text{m}$. مُلئ الخزّان بالوقود بمعدّل $200\ \text{L/min}$، فإنّ معدّل تغيّر ارتفاع الوقود في الخزّان عند أيّ لحظة هو:



a) $\frac{50}{\pi}\ \text{m/min}$

b) $\frac{20}{\pi}\ \text{m/min}$

c) $\frac{1}{50\pi}\ \text{m/min}$

d) $\frac{1}{20\pi}\ \text{m/min}$

26 وزارة ٢٠٢٥ التكميلي

يُمثّل الاقتران: $s(x) = 140 - 0.045x$ سعر القطعة الواحدة من مُنتج بالدينار لإحدى الشركات، حيث x عدد القطع المُنتجة. ويُمثّل الاقتران: $C(x) = 8000 + 20x + 0.08x^2$ تكلفة إنتاج x قطعة بالدينار. فما عدد القطع x الذي يتساوى عندها الإيراد الحدّي مع التكلفة الحدّية؟

a) 125

b) 160

c) 640

d) 480

27 وزارة ٢٠٢٥ التكميلي

تُمثّل العلاقة: $V = x^3$ حجم مُكعّب طول ضلعه (x) بالسنتيمترات. إذا كان حجم المُكعّب يتناقص بمعدل $81\ \text{cm}^3/\text{s}$ ، فإنّ معدل تغيّر طول ضلع المُكعّب عندما $x = 6\ \text{cm}$ هي:

a) $-\frac{3}{4}\ \text{cm/s}$

b) $-\frac{3}{2}\ \text{cm/s}$

c) $\frac{3}{4}\ \text{cm/s}$

d) $\frac{3}{2}\ \text{cm/s}$

28 وزارة ٢٠٢٥ التكميلي

يتحرك جُسيم على منحنى الاقتران: $f(x) = \frac{8}{2+\sqrt{x}}, x \geq 0$. إذا كان معدّل تغيّر الإحداثي x هو $2.5\ \text{cm/s}$ ، فإنّ معدّل تغيّر الإحداثي y عندما $x = 4\ \text{cm}$ هو:

a) $\frac{5}{8}\ \text{cm/s}$

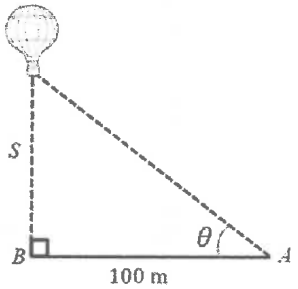
b) $-\frac{5}{8}\ \text{cm/s}$

c) $\frac{5}{16}\ \text{cm/s}$

d) $-\frac{5}{16}\ \text{cm/s}$

29 وزارة ٢٠٢٤ العام

معتمدًا الشكل الآتي الذي يُمثّل كاميرا مثبتة عند النقطة A ترصد منطادًا يرتفع رأسيًا إلى أعلى من النقطة B ، إذا أُعطي ارتفاع المنطاد بالاقتران: $s(t) = 10t^2$ ، حيث s موقع المنطاد بالأمتار، t الزمن بالدقائق، فإنّ معدّل تغيّر زاوية ارتفاع المنطاد θ بعد دقيقتين من بدء ارتفاعه، هو:



a) $0.25\ \text{rad/min}$

b) $0.34\ \text{rad/min}$

c) $0.86\ \text{rad/min}$

d) $0.93\ \text{rad/min}$

30 وزارة ٢٠٢٤ العام

مكعب طول ضلعه $5\ \text{cm}$. إذا بدأ المكعب بالتمدد فزاد طول ضلعه بمعدل $2\ \text{cm/min}$ ، وظلّ محافظًا على شكله، فإنّ معدّل تغيّر حجم المكعب بعد $1\ \text{min}$ من بدء تمدده، هو:

a) $147\ \text{cm}^3/\text{min}$

b) $216\ \text{cm}^3/\text{min}$

c) $294\ \text{cm}^3/\text{min}$

d) $108\ \text{cm}^3/\text{min}$

مفتاح الإجابات

1 ج	2 د	3 ب	4 أ	5 د
6 ج	7 أ	8 ج	9 ج	10 د
11 ج	12 ج	13 د	14 د	15 ج
16 أ	17 أ	18 ب	19 ب	20 أ
21 أ	22 أ	23 ب	24 ب	25 د
26 د	27 أ	28 د	29 ب	30 ج

الحل والشرح

1 **ج) c)** $f'(x)=\cos x-\sin x\cos 2x$ فيكون $f'(x)f(x)=(\cos x-\sin x)(\cos x+\sin x)=\cos^2 x-\sin^2 x=\cos 2x$

2 **د) d)** الاقتران الأسّي هو a^x حيث الأساس a موجب ومختلف عن 1. في $p(x)=\left(\frac{1}{4}\right)^x$ الأساس 1/4 موجب، أما الأساسان -4 و-1/5 فسالبان، و x^5 اقتران قوة.

3 **ب) (1, ∞) b)** القيمة 5^(x-2) موجبة دائمًا، فـ 3·5^(x-2) > 0، وبإضافة 1 يصبح الاقتران أكبر من 1؛ فالمدى (1, ∞).

4 **أ) y = 3 a)** الحد 2·(1/4)^x يقترب من 0 عندما x كبيرة، فيقترب الاقتران من 3؛ فخط التقارب الأفقي y = 3.

5 **د) d)** المنحنى $f(x)=\log_{\frac{1}{3}} x$ متناقص ويمر بالنقطة (1, 0)، فالأساس بين 0 و1. عند x = 3 يقترب الاقتران من -1، و log_(1/3) 3 = -1؛ فالقاعدة log_(1/3) x.

6 **ج) (-∞, 4) c)** اللوغاريتم لا يُعرَّف إلا لعدد موجب، فيلزم 4 - x > 0 أي x < 4، والمجال (-∞, 4).

7 **أ) 16 a)** $f(x)=x^{10/3}+bx^{1/3}$ فـ $f'(x)=\frac{10}{3}x^{7/3}+\frac{b}{3}x^{-2/3}$ عند $x=-1$: $-\frac{10}{3}+\frac{b}{3}=2$ فيكون $b=16$.

8 **ج)** $\left(0, \frac{4}{3}\right)$ السرعة تتناقص عندما يكون التسارع سالبًا. $v(t) = 3t^2 - 8t + 4$ و$a(t) = 6t - 8$. $a(t) < 0$ عندما $t < \frac{4}{3}$، ومع $t \geq 0$ تكون الفترة $\left(0, \frac{4}{3}\right)$.

9 **ج) c)** نكتب الاقتران $f(x) = 3x^{-2}$ ونشتق مرتين. المشتقة الأولى $f'(x) = -6x^{-3}$، والثانية $f''(x) = 18x^{-4} = \frac{18}{x^4}$ $\frac{18}{x^4}$

10 **د) d)** $-8e^{-4}$ بقاعدة الضرب: $h'(x) = g'(x)e^{-x} + g(x)\,(e^{-x})'$ وبقاعدة السلسلة $\frac{d}{dx}(e^u) = e^u \cdot u'$ مع الأس $u = -x$ يكون $(e^{-x})' = -e^{-x}$، فـ $h'(x) = g'(x)e^{-x} - g(x)e^{-x}$ من الشكل عند $x = 4$ قمة المنحنى، فـ $g(4) = 8$ وميل المماس $g'(4) = 0$، إذن $h'(4) = 0 - 8e^{-4} = -8e^{-4}$.

11 **ج) m/month** **c)** مشتقة القسمة: $h'(t) = \frac{(4+t^2)(2t) - t^2(2t)}{(4+t^2)^2} = \frac{8t}{(4+t^2)^2}$ عند $t = 1$: $\frac{8}{25}$ متر لكل شهر. $\frac{8}{25}$

12 **ج) c)** $(-3, -2)$ بقاعدة القسمة $f'(x) = \frac{-4}{(x+1)^2}$. نضع $\frac{-4}{(x+1)^2} = -1$ فيكون $(x+1)^2 = 4$، وبما أن $x < -1$ فإن $x = -3$ وتكون $y = \frac{4}{-2} = -2$، أي النقطة $(-3, -2)$.

13 **د) d)** $f'(x) = 2e^{2x} - 2e^{-2x}$ و $f''(x) = 4e^{2x} + 4e^{-2x}$، فـ $f'' + 2f' = 4e^{2x} + 4e^{-2x} + 8e^{2x}$ $4e^{2x} - 4e^{-2x} = 8e^{2x}$

14 **د) d)** $A'(t) = -32(t+2)^{-3}$، وعند $t = 2$: $A'(2) = -\frac{32}{64} = -\frac{1}{2}\ ^\circ\text{C/h}$ $-\frac{1}{2}\ ^\circ\text{C/h}$

15 **ج) c)** $f'(x) = \frac{1}{(2+\ln x)\ln 3} \times \frac{1}{x}$ وعند $x = e$: $\frac{1}{e\ln 27}$ $\frac{1}{e\ln 27} = \frac{1}{3e\ln 3}$

16 **أ) a) \frac{\sqrt{2}}{2}** $\frac{dy}{dt} = \sec^2 t$ و $\frac{dx}{dt} = 2\sec t \tan t$ فـ $\frac{dy}{dx} = \frac{\sec t}{2\tan t}$ وعند $t = \frac{\pi}{4}$: $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

17 **أ) a)** $3\sin(1 - 3x)$ نستعمل قاعدة مشتقة جيب التمام مع السلسلة: مشتقة $\cos g(x)$ هي $-\sin(g(x)) \times g'(x)$. هنا $g(x) = 1 - 3x$ ومشتقتها -3، فتكون $f'(x) = -\sin(1-3x) \times (-3) = 3\sin(1-3x)$

18 **ب) b)** $-\frac{1}{4}$ مشتقة e^{4x} بقاعدة السلسلة هي $4e^{4x}$، فميل المماس عند $x = 0$ يساوي 4. العمودي على المماس ميله سالب مقلوب ميل المماس، أي $-\frac{1}{4}$.

19 **ب) b) \frac{1}{5}** عند $y = 1$ تعطي المعادلة $x = 1$. بالاشتقاق الضمني عند $(1,1)$: $4y' = y' - 1$ (حدّ $\ln y$ يساوي صفرًا)، فيكون $y' = \frac{1}{5}$.

20 أ) a) بالاشتقاق الضمني $\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{y'}{2\sqrt{y}}=0$ وعند $(4,9)$: $y'=-\frac{3}{2}$. المماس $y-9=-\frac{3}{2}(x-4)$، وعند $x=0$: $y=15$.

21 أ) a) نشتق الطرفين بالنسبة إلى x: $2\cos y\cdot y'+2=2y'$. عند $(0,0)$: $2+y'=2y'$ فيكون $y'=2$.

22 أ) a) نشتق الطرفين ضمنيًّا: $\frac{y+xy'}{xy}=\frac{1+ey'}{e}$. عند $(e,1)$: $2y\,y'=2y'$ فيكون $2ey'=1+ey'$، أي $y'=\frac{1}{e}$.

23 ب) b) بأخذ اللوغاريتم الطبيعي: $\ln y=\frac{\ln x}{x}$، ثم نشتق ضمنيًّا: $\frac{y'}{y}=\frac{1-\ln x}{x^2}$ إذن ميل المماس $y'=\frac{y(1-\ln x)}{x^2}$.

24 ب) 0 (b) من $\int_1^3 2f\,dx=2\int_1^3 f\,dx=12$ نجد $\int_1^3 f\,dx=6$، و $\int_1^3 3\,dx=3(3-1)=6$. ومن $F(b)-F(a)$ فإنّ عكس الحدّين يغيّر الإشارة: $\int_3^1(3-f)\,dx=G(1)-G(3)=-(G(3)-G(1))=-\int_1^3(3-f)\,dx=-(6-6)=0$

25 د) d) $V=\pi r^2h=4\pi h$، و $200\ \text{L/min}=0.2\ \text{m}^3/\text{min}$ بالاشتقاق بالنسبة للزمن: $\frac{dh}{dt}=\frac{0.2}{4\pi}=\frac{1}{20\pi}\ \text{m/min}$

26 د) 480 (d) الإيراد R(x) = x·s(x) = 140x - 0.045x²، فالإيراد الحدّي 140 - 0.09x. التكلفة الحدّية C'(x) = 20 + 0.16x. بمساواتهما: 120 = 0.25x فتكون x = 480.

27 أ) a) نربط الحجم بطول الضلع بالمعادلة $V=x^3$ ثم نشتق بالنسبة إلى الزمن بقاعدة السلسلة: $\frac{dV}{dt}=3x^2\frac{dx}{dt}$ الحجم يتناقص، فنعوّض $3(36)\frac{dx}{dt}=-81$، ومنه $\frac{dx}{dt}=-\frac{3}{4}$ cm/s.

28 د) d) نشتق بالنسبة إلى الزمن: $f'(x)\cdot\frac{dx}{dt}$ مع $\frac{dy}{dt}=-\frac{5}{16}\ \text{cm/s}$ عند $x=4$: $f'(x)=\frac{-4}{\sqrt{x}(2+\sqrt{x})^2}$ فـ $f'(4)=\frac{-4}{2\cdot 16}=-\frac{1}{8}$ $\frac{dy}{dt}=-\frac{1}{8}\times 2.5=-\frac{5}{16}$ سم/ث.

29 ب) b) من الشكل $\tan\theta=\frac{s}{100}$. عند $t=2$: $s=40$ و $\frac{ds}{dt}=20t=40$ م/د. باشتقاق الطرفين بالنسبة إلى الزمن: $\sec^2\theta\,\frac{d\theta}{dt}=\frac{40}{100}$ و $\sec^2\theta=1+0.16$، فيكون $\frac{d\theta}{dt}=\frac{0.4}{1.16}\approx 0.34\ \text{rad/min}$.

30 ج) c) حجم المكعب $V=s^3$ حيث s طول الضلع، فإنّ $\frac{dV}{dt}=3s^2\frac{ds}{dt}$ بعد دقيقة $s=5+2=7$ فينتج $3(49)(2)=294\ \text{cm}^3/\text{min}$.

بدك أسئلة أكثر من هالوحدة؟ **بنك الأسئلة كامل** وزكي بيشرحلك أي سؤال، على **tawjihiai.com**

ملفات كل أسبوع وأسئلتكم يجاوب عليها زكي: **انضموا لمجموعتنا على تيليجرام**