أسئلة الوزارة
الرياضيات



الوحدة الخامسة

٥

التكامل

جيل ٢٠٠٩

٣٠ سؤال من امتحانات الوزارة ٢٠٢٢–٢٠٢٦
مفحوصة من الكتاب

✓ جرّب أولاً · الإجابات والشرح في آخر الملف

الموضوع ١: تكامل اقترانات خاصة

1 وزارة ٢٠٢٦ العام

ناتج: $\int \cot \frac{1}{2}x \, dx$ هو:

(a) $-2\ln|\cos \frac{1}{2}x| + C$

(b) $2\ln|\sin \frac{1}{2}x| + C$

(c) $-\frac{1}{2}\ln|\cos \frac{1}{2}x| + C$

(d) $\frac{1}{2}\ln|\sin \frac{1}{2}x| + C$

2 وزارة ٢٠٢٦ العام

ناتج: $\int \frac{2^{2x+2}}{\ln 2} \, dx$ هو:

(a) $\frac{2^{2x+2}}{\ln 2} + C$

(b) $\frac{2^{2x+1}}{\ln 2} + C$

(c) $\frac{2^{2x+2}}{(\ln 2)^2} + C$

(d) $\frac{2^{2x+1}}{(\ln 2)^2} + C$

3 وزارة ٢٠٢٦ العام

إذا كان: $\int_0^{\pi} \sin^2 x \, dx = a\pi$ ، فإنّ قيمة الثابت a هي:

(a) $\frac{1}{2}$

(b) $-\frac{1}{2}$

(c) $\frac{1}{4}$

(d) $-\frac{1}{4}$

4 وزارة ٢٠٢٦ العام

يُمثّل الاقتران: $\frac{dy}{dx} = e^{3x} - e^{-x}$ ميل المماس لمُنحنى الاقتران y. إذا كان مُنحنى y يمرّ بالنقطة $(0, 2)$، فإنّ قاعدة الاقتران y هي:

(a) $y = \frac{2}{3}e^{3x} - e^{-x} + \frac{1}{3}$

(b) $y = \frac{1}{3}e^{3x} + e^{-x} + \frac{2}{3}$

(c) $y = \frac{2}{3}e^{3x} - e^{-x} - \frac{1}{3}$

(d) $y = \frac{1}{3}e^{3x} + e^{-x} - \frac{2}{3}$

5 وزارة ٢٠٢٦ العام

إذا تحرّك جُسيم في مسار مستقيم، وكانت سرعته تُعطى بالاقتران: $v(t) = 4\sin t$، حيث v سرعته بالمتر لكلّ ثانية، و t الزمن بالثواني، فإنّ المسافة الكُلّية بالأمتار التي قطعها الجُسيم في الفترة $[0, 2\pi]$ هي:

a) 4	b) 5
c) 16	d) 32

الموضوع ٢: التكامل بالتعويض

6 وزارة ٢٠٢٦ العام

ناتج: $\int x^5 \left(1 + \frac{1}{x}\right)^5 dx$ هو:

a) $\frac{1}{6}x^6 + \frac{1}{5}x^5 + C$	b) $\frac{1}{6}(x+1)^6 + C$
c) $\frac{1}{6}x^6 - \frac{1}{5}x^5 + C$	d) $\frac{1}{5}(x+1)^5 + C$

7 وزارة ٢٠٢٦ العام

ناتج: $\int \frac{\sin^2 3x}{\cos^4 3x} dx$ هو:

a) $3\tan^3 3x + C$	b) $3\sec^3 3x + C$
c) $\frac{1}{9}\sec^3 3x + C$	d) $\frac{1}{9}\tan^3 3x + C$

8 وزارة ٢٠٢٥ التكميلي

قيمة $\int_0^1 (2x-3)^3 dx$ ، تساوي:

a) -20	b) 20
c) -10	d) 10

9 وزارة ٢٠٢٥ التكميلي

$\int \frac{2x^2}{x^3-4}dx$ هو:

a) $2\ln|x^3-4|+C$

b) $\frac{3}{2}\ln|x^3-4|+C$

c) $\frac{1}{2}\ln|x^3-4|+C$

d) $\frac{2}{3}\ln|x^3-4|+C$

10 وزارة ٢٠٢٥ التكميلي

$\int \frac{\ln x^4}{x}dx$ هو:

a) $2\ln x^2+C$

b) $2(\ln x)^2+C$

c) $\frac{\ln x^2}{2}+C$

d) $\frac{(\ln x)^2}{2}+C$

الموضوع ٣: التكامل بالكسور الجزئية

11 وزارة ٢٠٢٦ العام

ناتج: $\int \frac{x^2+3}{x^3+x}dx$ هو:

a) $3\ln|x|-\ln(x^2+1)+C$

b) $3\ln|x|+\ln(x^2+1)+C$

c) $\ln|x|-3\ln(x^2+1)+C$

d) $\ln|x|+3\ln(x^2+1)+C$

12 وزارة ٢٠٢٥ العام

ناتج: $\int \frac{x^2+2x+2}{x+2}\,dx$ هو:

a) $\frac{x^2}{2}+2\ln|x+2|+C$

b) $\frac{x^2}{2}-2\ln|x+2|+C$

c) $x^2+2\ln|x+2|+C$

d) $x^2-2\ln|x+2|+C$

13 وزارة ٢٠٢٥ العام

ناتج: $\int \frac{1}{x^2(x-1)}\,dx$ هو:

a) $\ln|x|-\ln|x-1|-\frac{1}{x}+C$

b) $\ln|x|-\ln|x-1|+\frac{1}{x}+C$

c) $\ln|x-1|-\ln|x|-\frac{1}{x}+C$

d) $\ln|x-1|-\ln|x|+\frac{1}{x}+C$

14 وزارة ٢٠٢٥ التكميلي

إذا كان: $\int \frac{x^2+3x+9}{x+3}dx = ax^2 + 9\ln|x+3| + C$ ، فإنّ قيمة الثابت a هي:

a) 3	b) \frac{1}{3}
c) \frac{1}{2}	d) 2

15 وزارة ٢٠٢٥ التكميلي

ناتج: $\int \frac{x+4}{x^2-x}\,dx$ هو:

a) $5\ln|x-1| - 4\ln|x| + C$	b) $5\ln|x-1| + 4\ln|x| + C$
c) $3\ln|x-1| - 4\ln|x| + C$	d) $3\ln|x-1| + 4\ln|x| + C$

الموضوع ٤: التكامل بالأجزاء

16 وزارة ٢٠٢٦ العام

ناتج: $\int \sec^2\sqrt{x}dx$ هو:

a) $2\sqrt{x}\tan\sqrt{x} - 2\ln|\cos\sqrt{x}| + C$	b) $-2\sqrt{x}\tan\sqrt{x} + 2\ln|\cos\sqrt{x}| + C$
c) $2\sqrt{x}\tan\sqrt{x} + 2\ln|\cos\sqrt{x}| + C$	d) $-2\sqrt{x}\tan\sqrt{x} - 2\ln|\cos\sqrt{x}| + C$

17 وزارة ٢٠٢٤ العام

ناتج: $\int \ln\sqrt{x}\,dx$ ، هو:

a) \frac{1}{2}x \ln x - x + C	b) \frac{1}{2}x \ln x + x + C
c) \frac{1}{2}x \ln x - \frac{1}{2}x + C	d) \frac{1}{2}x \ln x + \frac{1}{2}x + C

18 وزارة ٢٠٢٣ التكميلي

قيمة $\int_1^2 \ln x^2\,dx$ تساوي:

a) $4\ln 2 - 2$	b) $4\ln 2 - 6$
c) $4\ln 2 - 4$	d) $2\ln 2 - 1$

19 وزارة ٢٠٢٣ التكميلي

$\int x \csc^2 x \, dx$ يساوي:

a) $-x \cot x + \ln|\cos x| + C$

b) $x \cot x - \ln|\cos x| + C$

c) $-x \cot x + \ln|\sin x| + C$

d) $x \cot x + \ln|\sin x| + C$

20 وزارة ٢٠٢٣ التكميلي

إذا كان: $\int_0^1 f(x)dx = 1, f(1) = 8, f(0) = 5$ ، فإن قيمة $\int_0^1 xf'(x)dx$ تساوي:

a) 2

b) 3

c) 8

d) 7

الموضوع ٥: المساحات والحجوم

21 وزارة ٢٠٢٦ العام

إذا كانت مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران: $f(x) = \frac{4}{x}$, $x \neq 0$ والمحور x والمستقيمين: $x = a$, $x = 1$ تساوي 12 وحدة مربّعة، فإنّ قيمة الثابت a، حيث $a > 1$ هي:

a) e

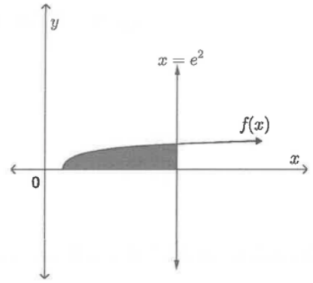
b) e^2

c) e^3

d) e^4

22 وزارة ٢٠٢٦ العام

اعتمادًا على التمثيل البياني الآتي الذي يُبيّن منحنى الاقتران: $f(x) = \sqrt{\ln x}$، والمستقيم $x = e^2$ ، فإنّ حجم المُجسّم الناتج من دوران المنطقة المُظلّلة حول المحور x بالوحدات المكعّبة هو:



a) $\pi(e^2 - 1)$

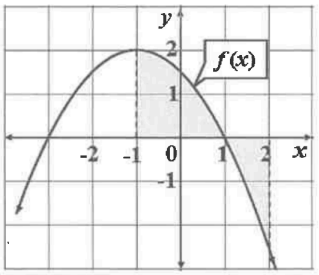
b) $\pi(e^2 + 1)$

c) $\pi(2e^2 - 1)$

d) $\pi(2e^2 + 1)$

23 وزارة ٢٠٢٥ التكميلي

التكامل المحدود الذي قيمته تساوي مساحة المنطقة المظلّلة في التمثيل البياني الآتي هو:



a) $\int_{-1}^{1} f(x)dx + \int_{1}^{2} f(x)dx$

b) $\int_{-1}^{1} f(x)dx - \int_{1}^{2} f(x)dx$

c) $-\int_{-1}^{1} f(x)dx + \int_{1}^{2} f(x)dx$

d) $-\int_{-1}^{1} f(x)dx - \int_{1}^{2} f(x)dx$

24 وزارة ٢٠٢٥ التكميلي

مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران: $f(x) = x + 1$ ، والمحور x ، والمستقيم $x =$ 0 بالوحدات المربعة، هي:

a) $\frac{1}{2}$	b) $\frac{3}{2}$
c) 1	d) 2

25 وزارة ٢٠٢٥ العام

مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران: f(x) = -√x ، والمحور x ، والمستقيم x = 9 بالوحدات المربعة، هي:

a) 36	b) 27
c) 9	d) 18

الموضوع ٦: المعادلات التفاضلية

26 وزارة ٢٠٢٦ العام

حلّ المعادلة التفاضلية: $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 y}$ هو:

a) $\frac{1}{2}y + \frac{1}{2}\sin 2y = \cot x + C$	b) $\frac{1}{2}y + \frac{1}{4}\sin 2y = \cot x + C$
c) $\frac{1}{2}y + \frac{1}{2}\sin 2y = -\cot x + C$	d) $\frac{1}{2}y + \frac{1}{4}\sin 2y = -\cot x + C$

27 وزارة ٢٠٢٥ العام

حلّ المعادلة التفاضلية: $\frac{dy}{dx} = \frac{((x-3)\sin y)^2}{3-x}$ الذي تحققه النقطة $(0, \frac{\pi}{4})$ هو:

a) $-\tan y = 3x + \frac{x^2}{2} - 1$	b) $\tan y = 3x + \frac{x^2}{2} + 1$
c) $-\cot y = 3x - \frac{x^2}{2} - 1$	d) $\cot y = 3x - \frac{x^2}{2} + 1$

28 وزارة ٢٠٢٥ التكميلي

حلّ المعادلة التفاضلية: $x\frac{dy}{dx} = \sqrt{y}\,(3x+1)$ الذي تحققه النقطة $(1,1)$ هو:

a) $\sqrt{y} = 3x + \ln|x| - 2$

b) $\sqrt{y} = 3x + \ln|x| + 2$

c) $2\sqrt{y} = 3x + \ln|x| - 1$

d) $2\sqrt{y} = 3x + \ln|x| + 1$

29 وزارة ٢٠٢٤ العام

الحل العام للمعادلة التفاضلية: $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{xy}$ ، $x > 0,\ y > 0$ هو:

a) $y^2 = \ln x^2 + C$

b) $y = \ln x + C$

c) $x^2 = \ln y^2 + C$

d) $x = \ln y + C$

30 وزارة ٢٠٢٤ العام

حل المعادلة التفاضلية: $\frac{dy}{dx} = e^{(x+y)}$ ، الذي يحقق النقطة $(0,0)$ ، هو:

a) $e^{-y} = e^x - 2$

b) $3e^{-y} = 2 - e^x$

c) $e^{-y} = 2 - e^x$

d) $3e^{-y} = e^x + 2$

مفتاح الإجابات

1 ب	2 د	3 أ	4 ب	5 ج
6 ب	7 د	8 ج	9 د	10 ب
11 أ	12 أ	13 د	14 ج	15 أ
16 ج	17 ج	18 أ	19 ج	20 د
21 ج	22 ب	23 ب	24 أ	25 د
26 د	27 ج	28 ج	29 أ	30 ج

الحل والشرح

1 **ب) b)** $2\ln|\sin\frac{1}{2}x|+C$ بالتعويض $u=\frac{1}{2}x$ فـ $dx=2\,du$: $\int\cot\frac{x}{2}dx=2\int\frac{\cos u}{\sin u}du=$ $2\ln|\sin\frac{1}{2}x|+C$

2 **د) d)** $\frac{2^{2x+1}}{(\ln 2)^2}+C$ وقسمته على $\ln 2$ تعطي $\int 2^{2x+2}dx=\frac{2^{2x+2}}{2\ln 2}+C$ $\frac{2^{2x+1}}{(\ln 2)^2}+C$.

3 **أ) a)** $\left[\frac{x}{2}-\frac{\sin 2x}{4}\right]_0^{\pi}=\frac{\pi}{2}$ $\frac{1}{2}$ فـ $\int_0^{\pi}\frac{1}{2}(1-\cos 2x)dx=$ $a=\frac{1}{2}$.

4 **ب) b)** $y=\int(e^{3x}-e^{-x})dx=\frac{1}{3}e^{3x}+e^{-x}+C$ $y=\frac{1}{3}e^{3x}+e^{-x}+\frac{2}{3}$ عند $(0,2)$: $\frac{1}{3}+1+2=C$ فـ $C=\frac{2}{3}$.

5 **ج) c)** السرعة سالبة في $(\pi,2\pi)$ فالمسافة الكلية $=8+\left|\int_{\pi}^{2\pi}4\sin t\,dt\right|=\int_0^{\pi}4\sin t\,dt+$ $16=8$ م.

6 **ب) b)** $\frac{1}{6}(x+1)^6+C$ لأنّ $x^5(1+\frac{1}{x})^5=(x+1)^5$، فالتكامل $x(1+\frac{1}{x})=x+1$ $.1)^6+C$

7 **د) d)** $du=3\sec^2 3x\,dx$ فـ $u=\tan 3x$ بالتعويض $\frac{\sin^2 3x}{\cos^4 3x}=\tan^2 3x\sec^2 3x$ $\frac{1}{9}\tan^3 3x+C$ فالناتج $\frac{1}{9}\tan^3 3x+C$.

8 ج) **-10 c)** نفترض $u = 2x - 3$ فيكون $du = 2dx$، فالتكامل $\frac{1}{2}\int u^3 du = \frac{(2x-3)^4}{8}$ من 0 إلى 1: $\frac{1-81}{8} = -10$.

9 د) **d)** نفترض $u = x^3 - 4$ فيكون $du = 3x^2dx$، أي $2x^2dx = \frac{2}{3}du$. فالتكامل $\frac{2}{3}\int \frac{du}{u} = \frac{2}{3}\ln|x^3 - 4| + C$

10 ب) **b)** $\int \frac{\ln x}{x}dx = \frac{1}{2}(\ln x)^2$ بالتعويض $u = \ln x$ يكون $\ln x^4 = 4\ln x$. فبضرب الناتج في 4 نحصل على $2(\ln x)^2 + C$.

11 أ) **a)** $3\ln|x| - \ln(x^2+1) + C$ وتكاملها $\frac{x^2+3}{x(x^2+1)} = \frac{3}{x} - \frac{2x}{x^2+1}$.

12 أ) **a)** $\frac{x^2+2x+2}{x+2} = x + \frac{2}{x+2}$ درجة البسط (٢) أكبر من درجة المقام (١)، فنقسم أولًا: $\frac{x^2}{2} + 2\ln|x+2| + C$ ثم نكامل لنحصل على $\frac{x^2}{2} + 2\ln|x+2| + C$.

13 د) **d)** $\frac{1}{x^2(x-1)} = \frac{-1}{x} + \frac{-1}{x^2} + \frac{1}{x-1}$ المقام فيه العامل المكرر x^2، فنكتب $\ln|x-1| - \ln|x| + \frac{1}{x} + C$ وتكامله

14 ج) **c) \frac{1}{2}** نقسم البسط على المقام: $\frac{x^2+3x+9}{x+3} = x + \frac{9}{x+3}$ فالتكامل $\frac{x^2}{2} + 9\ln|x+3| + C$، وإذن $a = \frac{1}{2}$.

15 أ) **a)** $5\ln|x-1| - 4\ln|x| + C$ المقام $x(x-1)$ عاملان خطيان مختلفان، فنكتب $\frac{x+4}{x(x-1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1}$ ومنه $x + 4 = A(x-1) + Bx$؛ عند $x = 0$: $A = -4$ وعند $x = 1$: $B = 5$. فالتكامل $-4\ln|x| + 5\ln|x-1| + C$.

16 ج) **c)** $2\sqrt{x}\tan\sqrt{x} + 2\ln|\cos\sqrt{x}| + C$ نعوّض $u = \sqrt{x}$ فـ $dx = 2u\,du$ ويصبح التكامل $2\int u\sec^2 u\,du = 2\left(u\tan u - \int \tan u\,du\right) = 2\sqrt{x}\tan\sqrt{x} + 2\ln|\cos\sqrt{x}| + C$

17 ج) **c) \frac{1}{2}x \ln x - \frac{1}{2}x + C** $\ln\sqrt{x} = \frac{1}{2}\ln x$. بالأجزاء مع $u = \ln x$ و $dv = dx$: $\int \ln x\,dx = x\ln x - \int dx = x\ln x - x$. الناتج $\frac{1}{2}x\ln x - \frac{1}{2}x + C$.

18 أ) **a)** $\ln x^2 = 2\ln x$ $4\ln 2 - 2$. بالأجزاء مع $u = \ln x$ و$dv = dx$: $\int \ln x\,dx = x\ln x - x$. إذن $2(x\ln x - x)\Big|_1^2 = 2[(2\ln 2 - 2) - (-1)] = 4\ln 2 - 2$

19 ج (c) $-x\cot x+\ln|\sin x|+C$ نأخذ $u=x$ و$dv=\csc^2 x\,dx$ فيكون $du=dx$ و$v=-\cot x$ (من $\int \csc^2 x\,dx=-\cot x+C$). إذن $\int x\csc^2 x\,dx=-x\cot x+\int \cot x\,dx$. وبما أن $\int \cot x\,dx=\int \frac{\cos x}{\sin x}dx=\ln|\sin x|+C$ (لأن البسط مشتقة المقام). فالناتج $-x\cot x+$ فإن $\frac{\cos x}{\sin x}$ $\ln|\sin x|+C$.

20 د) 7 (d) نأخذ $u=x$ و$dv=f'(x)dx$ فيكون $v=f(x)$. إذن $\int_0^1 xf'(x)dx=xf(x)\Big|_0^1-\int_0^1 f(x)dx=8-0-1=7$

21 ج (c) $a=e^3$ و $\ln a=3$ فـ $\int_1^a \frac{4}{x}dx=4\ln a=12$.

22 ب (b) $V=\pi\int_1^{e^2}(\sqrt{\ln x})^2dx=\pi\int_1^{e^2}\ln x\,dx=\pi[x\ln x-x]_1^{e^2}=\pi(2e^2-e^2+1)=\pi(e^2+1)$

23 ب (b) المساحة فوق المحور x (من -1 إلى 1) تعطي تكاملًا موجبًا، والمساحة تحته (من 1 إلى 2) تعطي تكاملًا سالبًا، فللحصول على مساحة موجبة نطرح الثاني: $\int_{-1}^1 f(x)dx-\int_1^2 f(x)dx$.

24 أ) a) المستقيم $y=x+1$ يقطع المحور x عند $x=-1$، فالمنطقة بين $x=-1$ و$x=0$ فوق المحور: $\int_{-1}^0(x+1)dx=\left[\frac{x^2}{2}+x\right]_{-1}^0=0-\left(\frac{1}{2}-1\right)=\frac{1}{2}$

25 د) 18 (d) الاقتران سالب، والمساحة تؤخذ موجبة: $\int_0^9\sqrt{x}\,dx=\frac{2}{3}x^{3/2}\Big|_0^9=\frac{2}{3}\times 27=18$

26 د) (d) $\frac{1}{2}y+\frac{1}{4}\sin 2y=-\cot x+C$ بفصل المتغيّرات $\cos^2 y\,dy=\frac{dx}{\sin^2 x}$ وبالتكامل: $\frac{1}{4}\sin 2y=-\cot x+C$

27 ج (c) $-\cot y=3x-\frac{x^2}{2}-1$ نفصل المتغيرين: $\frac{dy}{\sin^2 y}=(3-x)dx$ فنكامل: $-\cot y=3x-\frac{x^2}{2}+C$ بالنقطة $(0,\frac{\pi}{4})$ نجد $C=-1$.

28 ج (c) $2\sqrt{y}=3x+\ln|x|-1$ نفصل المتغيرين: $\left(3+\frac{1}{x}\right)dx=\frac{dy}{\sqrt{y}}$ ثمّ نكامل فنحصل على $2\sqrt{y}=3x+\ln|x|+C$. بتعويض $(1,1)$: $2=3+C$ فـ $C=-1$.

29 أ) a) $y^2=\ln x^2+C$ نفصل المتغيّرين: $y\,dy=\frac{dx}{x}$ ثم نكامل: $\frac{y^2}{2}=\ln x+C_1$، أي $2\ln x+C=\ln x^2+C$.

30 **ج) c)** $e^{x}e^{y}\,e^{-y}=2-e^{x}$ فنفصل: $e^{-y}dy=e^{x}dx$ ونكامل: $-e^{-y}=e^{x}+C$. من $(0,0)$: $-1=1+C$ فـ $C=-2$، إذن $e^{-y}=2-e^{x}$.

بدك أسئلة أكثر من هالوحدة؟ **بنك الأسئلة كامل** وزكي بيشرحلك أي سؤال، على **tawjihiai.com**

ملفات كل أسبوع وأسئلتكم يجاوب عليها زكي: **انضموا لمجموعتنا على تيليجرام**